

## CHƯƠNG II. MŨ VÀ LOGARIT

### 1. LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA

#### 1.1. Khái niệm lũy thừa

##### 1.1.1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho  $n$  là một số nguyên dương.

Với  $a$  là số thực tùy ý, lũy thừa bậc  $n$  của  $a$  là tích của  $n$  thừa số  $a$ .

$$a^n = \underbrace{a.a.....a}_n \text{ ( } n \text{ thừa số).}$$

Với  $a \neq 0$  thì  $a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ta gọi  $a$  là cơ số,  $n$  là mũ số. Và chú ý  $0^0, 0^{-n}$  không có nghĩa.

##### 1.1.2. Một số tính chất của lũy thừa

- Giả thuyết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}, (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$$

- Nếu  $a > 1$  thì  $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
- Nếu  $0 < a < 1$  thì  $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$
- Với mọi  $0 < a < b$ , ta có:  $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$

$$a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

#### Chú ý :

- Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.
- Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số  $a$  phải khác 0.
- Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số  $a$  phải dương.

## 1.2. Phương trình $x^n = b$

Ta có kết quả biện luận số nghiệm của phương trình  $x^n = b$  như sau:

- Trường hợp  **$n$  lẻ**:

Với mọi số thực  $b$ , phương trình có nghiệm duy nhất là  $\sqrt[n]{b}$ .

- Trường hợp  **$n$  chẵn**:

- Với  $b < 0$ , phương trình vô nghiệm.
- Với  $b = 0$ , phương trình có một nghiệm  $x = 0$
- Với  $b > 0$ , phương trình có hai nghiệm trái dấu, kí hiệu giá trị dương là  $\sqrt[n]{b}$ , còn giá trị âm là  $-\sqrt[n]{b}$

## 1.3. Một số tính chất của căn bậc $n$

Với  $a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$ , ta có:

- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \forall a$
- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, \forall a$
- $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b}, \forall ab \geq 0$
- $\sqrt[2n+1]{ab} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b}, \forall a, b$
- $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0$
- $\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \forall a > 0, n \text{ nguyên dương}, m \text{ nguyên}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0, n, m \text{ nguyên dương}$
- Nếu  $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$  thì  $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n \text{ nguyên dương}, p, q \text{ nguyên}$
- Đặc biệt:**  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$

## 1.4. Hàm số lũy thừa

### 1.4.1. Khái niệm

Xét hàm số  $y = x^\alpha$ , với  $\alpha$  là số thực cho trước.

Hàm số  $y = x^\alpha$ , với  $\alpha \in \mathbb{R}$ , được gọi là hàm số lũy thừa.

**Chú ý.** Tập xác định của hàm số lũy thừa  $y = x^\alpha$  tùy thuộc vào giá trị của  $\alpha$

- Với  $\alpha$  nguyên dương, tập xác định là  $\mathbb{R}$
- Với  $\alpha$  nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Với  $\alpha$  không nguyên, tập xác định  $(0, +\infty)$

**1.4.2. Khảo sát hàm số lũy thừa  $y = x^\alpha$**

Tập xác định của hàm số lũy thừa  $y = x^\alpha$  luôn chứa khoảng  $(0, +\infty)$  với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số  $y = x^\alpha$  trên khoảng này.

| $y = x^\alpha \ (\alpha > 0)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $y = x^\alpha \ (\alpha < 0)$ |           |           |      |  |   |     |  |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |   |           |      |  |   |     |           |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-----------|-----------|------|--|---|-----|--|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---|-----------|------|--|---|-----|-----------|--|
| <div>1. Tập xác định: <math>(0, +\infty)</math></div> <div>2. Sự biến thiên<br/><math display="block">y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} &gt; 0, \forall x &gt; 0</math><div>Giới hạn đặc biệt:<br/><math display="block">\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty</math></div>Tiệm cận: không có.</div> <div>3. Bảng biến thiên.<table><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y'</math></td><td></td><td>+</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td></td><td><math>+\infty</math></td></tr></table><div><math>0 \nearrow</math></div></div> | $x$                           | 0         | $+\infty$ | $y'$ |  | + | $y$ |  | $+\infty$ | <div>1. Tập xác định: <math>(0, +\infty)</math></div> <div>2. Sự biến thiên<br/><math display="block">y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} &lt; 0, \forall x &gt; 0</math><div>Giới hạn đặc biệt:<br/><math display="block">\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0</math></div>Tiệm cận:<br/><math>Ox</math> là TCN. <math>Oy</math> là TCD.</div> <div>3. Bảng biến thiên.<table><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y'</math></td><td></td><td>-</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td><math>+\infty</math></td><td></td></tr></table><div><math>\searrow 0</math></div></div> | $x$ | 0 | $+\infty$ | $y'$ |  | - | $y$ | $+\infty$ |  |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0                             | $+\infty$ |           |      |  |   |     |  |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |   |           |      |  |   |     |           |  |
| $y'$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                               | +         |           |      |  |   |     |  |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |   |           |      |  |   |     |           |  |
| $y$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                               | $+\infty$ |           |      |  |   |     |  |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |   |           |      |  |   |     |           |  |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0                             | $+\infty$ |           |      |  |   |     |  |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |   |           |      |  |   |     |           |  |
| $y'$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                               | -         |           |      |  |   |     |  |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |   |           |      |  |   |     |           |  |
| $y$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $+\infty$                     |           |           |      |  |   |     |  |           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |   |           |      |  |   |     |           |  |

Đồ thị của hàm số lũy thừa  $y = x^\alpha$  luôn đi qua điểm  $I(1,1)$

